

CS5101: Design and Analysis of Algorithms

Algorithm design



Arijit Mondal

Dept of CSE

`arijit@iitp.ac.in`

`https://www.iitp.ac.in/~arijit/`

Algorithm design

- Coin change problem
 - Initial recursive definition
 - Permutation generation
 - Refining recursive definition
 - Combination generation
 - Overlapping subproblems
 - Memoization / Dynamic programming
 - Pruning recursion tree
 - Depth first branch-bound
 - Greedy methods
 - Special cases

Coin change problem

- Given a set C of n coins having denomination values $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ and a desired final value of S find the **minimum number of coins** to be chosen from C to get an exact value of S from the sum of denominations of the chosen subset.

$$C = \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{7} \quad \textcircled{8} \quad \textcircled{10} \end{array} \quad S=15$$

Coin change problem

- Given a set C of n coins having denomination values $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ and a desired final value of S find the **minimum number of coins** to be chosen from C to get an exact value of S from the sum of denominations of the chosen subset.

$$C = \textcircled{1} \textcircled{4} \textcircled{7} \textcircled{8} \textcircled{10} \quad S=15$$

$$C_1 = \textcircled{1} \textcircled{4} \textcircled{10}$$

$$C_2 = \textcircled{7} \textcircled{8}$$

C_2 is an optimal solution

Coin change: recursive idea

- Target is to develop a method that determines the minimum number of coins to provide S and the corresponding set $\langle X, k \rangle = \text{CoinChange}(U, P, v, r, n)$ where
 - U — list of used coins so far
 - P — pending list, list of remaining coins
 - v — value of set U
 - r — remaining value to be chosen from P
 - n — number of coins selected so far
 - X — final list
 - k — minimum number of coins

Coin change: recursive idea

- Target is to develop a method that determines the minimum number of coins to provide S and the corresponding set $\langle X, k \rangle = \text{CoinChange}(U, P, v, r, n, k)$ where
 - U — list of used coins so far
 - P — pending list, list of remaining coins
 - v — value of set U
 - r — remaining value to be chosen from P
 - n — number of coins selected so far
 - X — final list
 - k — minimum number of coins
- $\text{CoinChange}(\text{NULL}, C, 0, S, 0)$ — Top level call

Coin change: recursive idea

- Target is to develop a method that determines the minimum number of coins to provide S and the corresponding set $\langle X, k \rangle = \text{CoinChange}(U, P, v, r, n)$ where
 - U — list of used coins so far
 - P — pending list, list of remaining coins
 - v — value of set U
 - r — remaining value to be chosen from P
 - n — number of coins selected so far
 - X — final list
 - k — minimum number of coins
- $\text{CoinChange}(\text{NULL}, C, 0, S, 0)$ — Top level call
- Intuitive idea for getting a change: select a coin with denomination v , then search for change $S-v$ with the remaining coins
- Find all possibilities in above step, select the best one

Coin change: recursive idea

- Target is to develop a method that determines the minimum number of coins to provide S and the corresponding set $\langle X, k \rangle = \text{CoinChange}(U, P, v, r, n)$ where
 - U — list of used coins so far
 - P — pending list, list of remaining coins
 - v — value of set U
 - r — remaining value to be chosen from P
 - n — number of coins selected so far
 - X — final list
 - k — minimum number of coins
- $\text{CoinChange}(\text{NULL}, C, 0, S, 0)$ — Top level call
- Intuitive idea for getting a change: select a coin with denomination v , then search for change $S-v$ with the remaining coins
- Find all possibilities in above step, select the best one
- Recursion can be a good choice
 - Base condition: remaining value ≤ 0 , no more coins to add
 - Recursive condition: select a coin with denomination d , then recurse on (remaining value - d)

$\langle X, k \rangle = \text{CoinChange}(U, P, v, r, n)$

Base condition:

1. if($r = 0$) return $\langle U, n \rangle$
2. if($r < 0$) return $\langle \text{NULL}, \infty \rangle$
3. if($P = \text{NULL}$) return $\langle \text{NULL}, \infty \rangle$

Recursive steps:

1. $X_{\min} = \text{NULL}; \min = \infty;$
2. for each p_i in P do
3. $U' = U + \{p_i\}$
4. $P' = P - \{p_i\}$
5. $\langle X', k' \rangle = \text{CoinChange}(U', P', v + p_i, r - p_i, n + 1)$
6. if($k' < \min$)
7. $\min = k'$
8. $X_{\min} = X'$
9. endif
10. endfor
11. return $\langle X_{\min}, \min \rangle$

Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

8

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

8

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

8

7

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

×

Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

8

7

×

Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

8

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

7

×

4

$\{10, 4\}, \{8, 7, 1\},$
 $14, 1, 2$

$\emptyset, \infty$

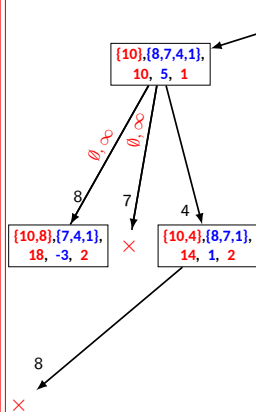
$\emptyset, \infty$

Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

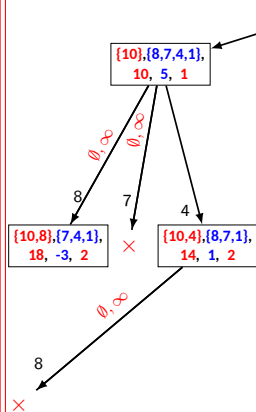


Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

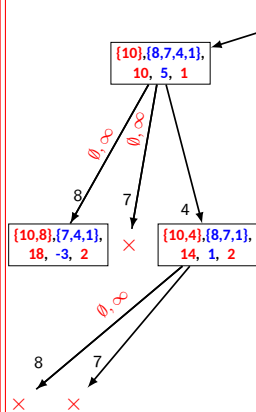


Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$



Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

$\{10, 4\}, \{8, 7, 1\},$
 $14, 1, 2$

×

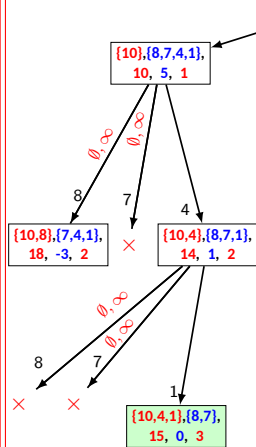
×

Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

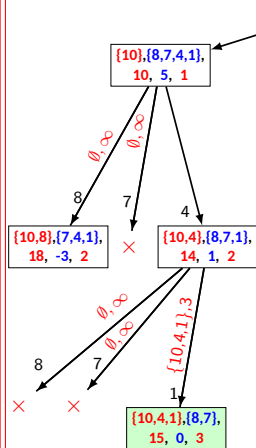


Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

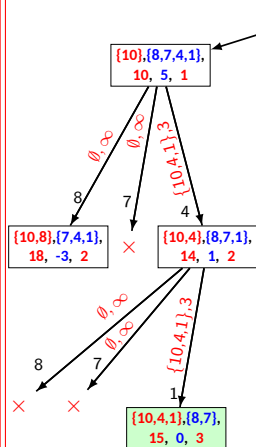


Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

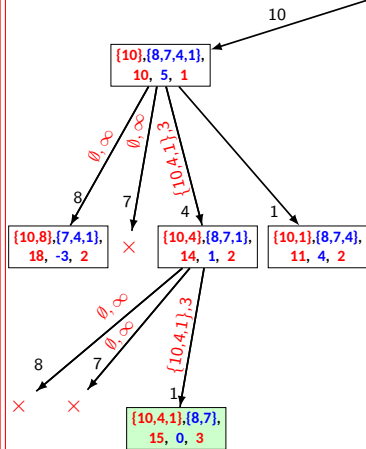


Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

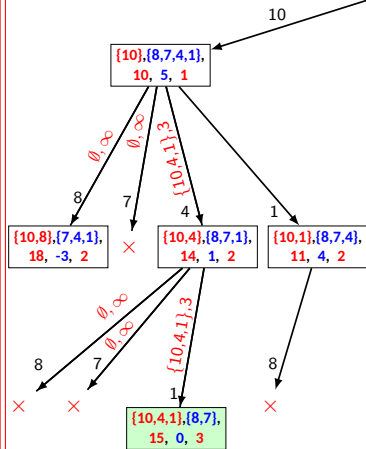


Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$



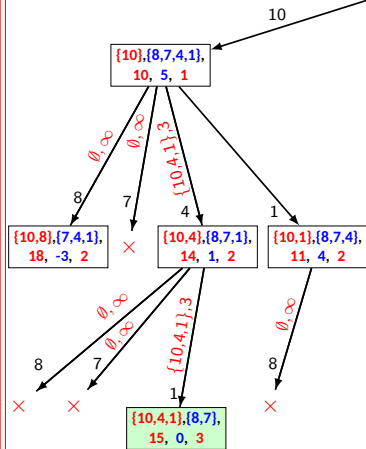
Example

- $\{u_j\}$ — used list
- $\{p_j\}$ — pending list
- v — value achieved so far
- r — remaining value
- n — number of coins selected

$$\{u_i\}, \{p_j\},$$

$$v, r, n$$

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

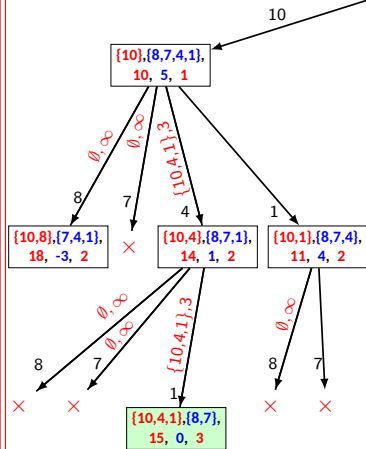


Algorithms

$$\{u_i\}, \{p_j\},$$

$$v, r, n$$

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$



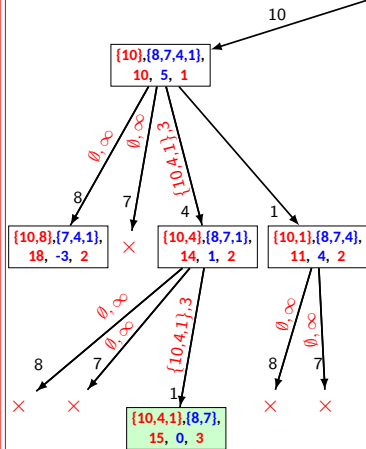
Example

- $\{u_j\}$ — used list
- $\{p_j\}$ — pending list
- v — value achieved so far
- r — remaining value
- n — number of coins selected

$$\{u_i\}, \{p_j\},$$

$$\mathbf{v}, \mathbf{r}, \mathbf{n}$$

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$



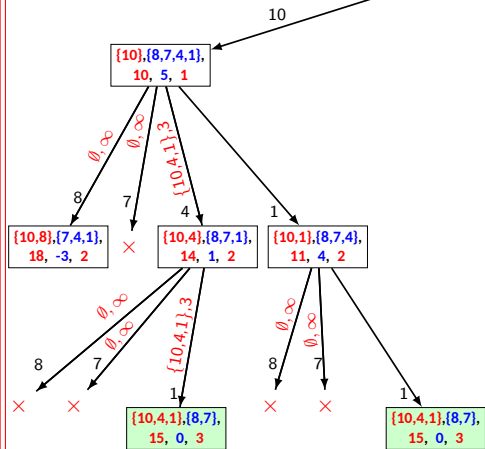
Example

- $\{u_j\}$ — used list
- $\{p_j\}$ — pending list
- v — value achieved so far
- r — remaining value
- n — number of coins selected

$$\{u_i\}, \{p_j\},$$

$$v, r, n$$

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

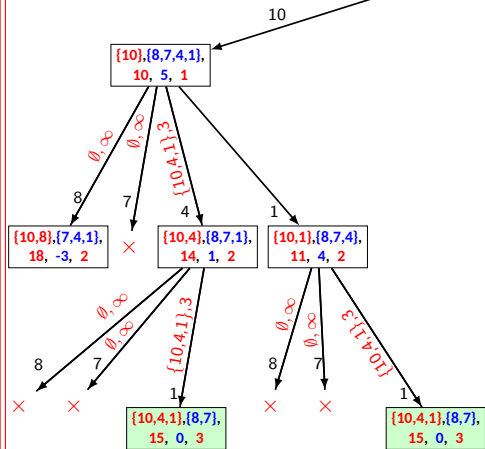


Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$



Algorithms

$$\{u_i\}, \{p_j\},$$

$$v, r, n$$

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$



Algorithms

$$\{u_i\}, \{p_j\},$$

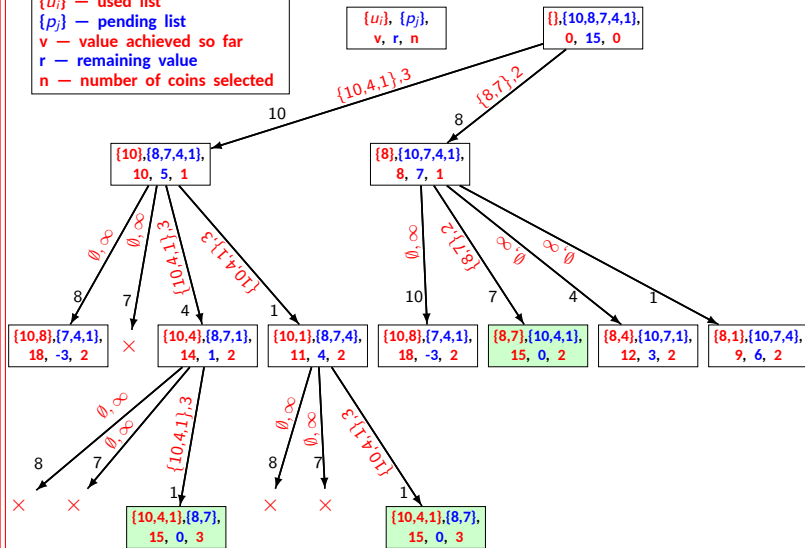
$$v, r, n$$

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$



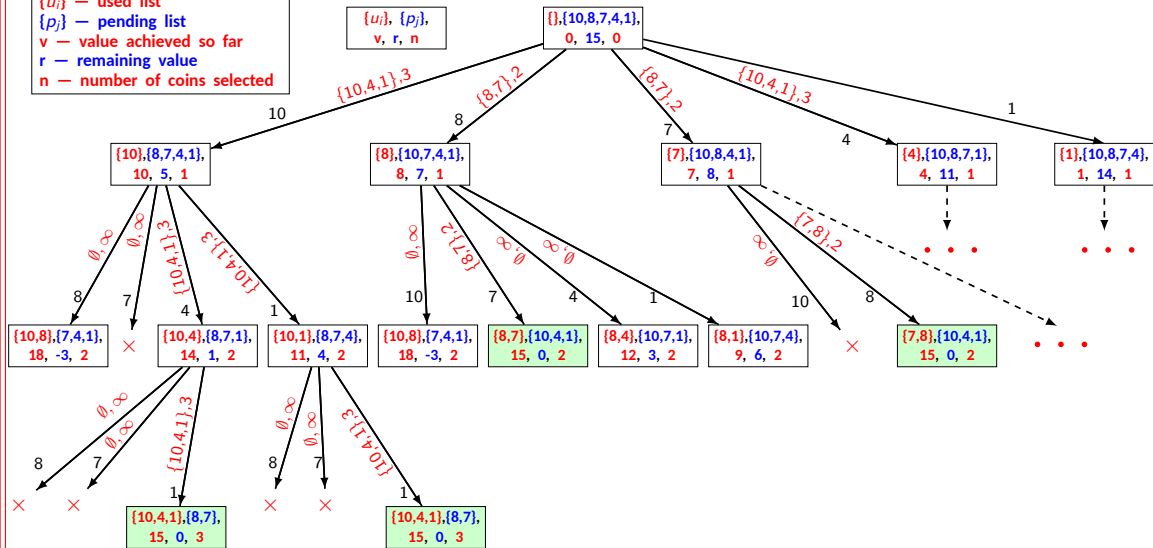
Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected



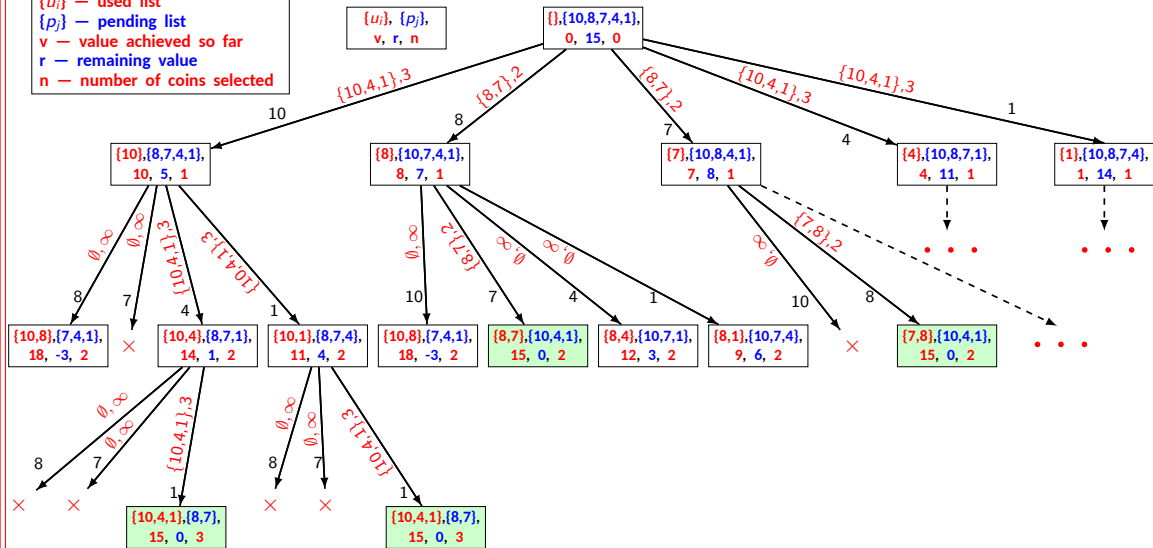
Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected



Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

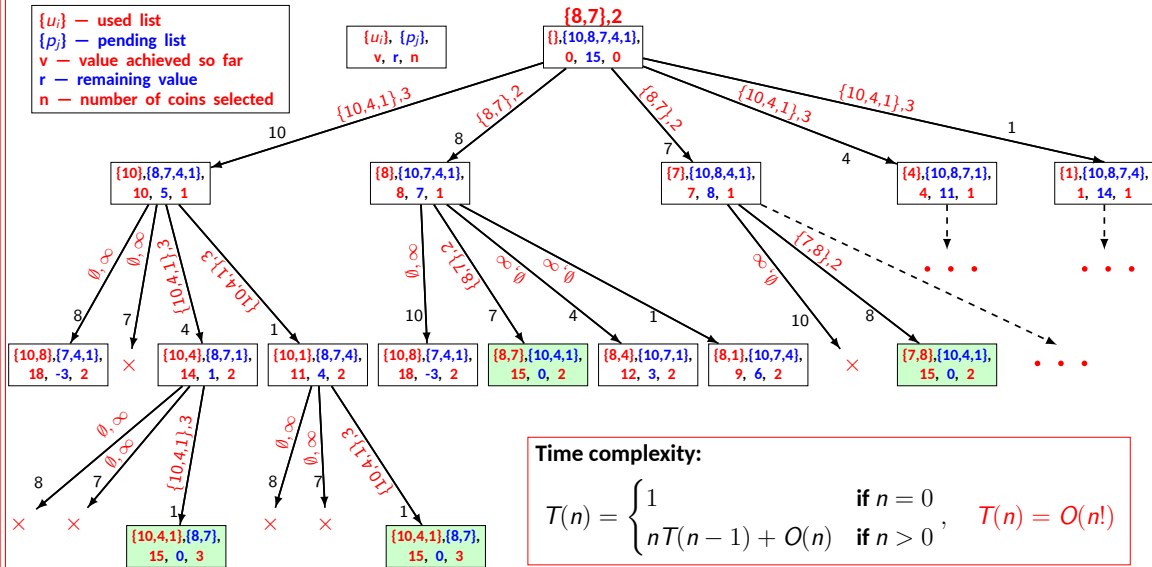


Algorithms



Example

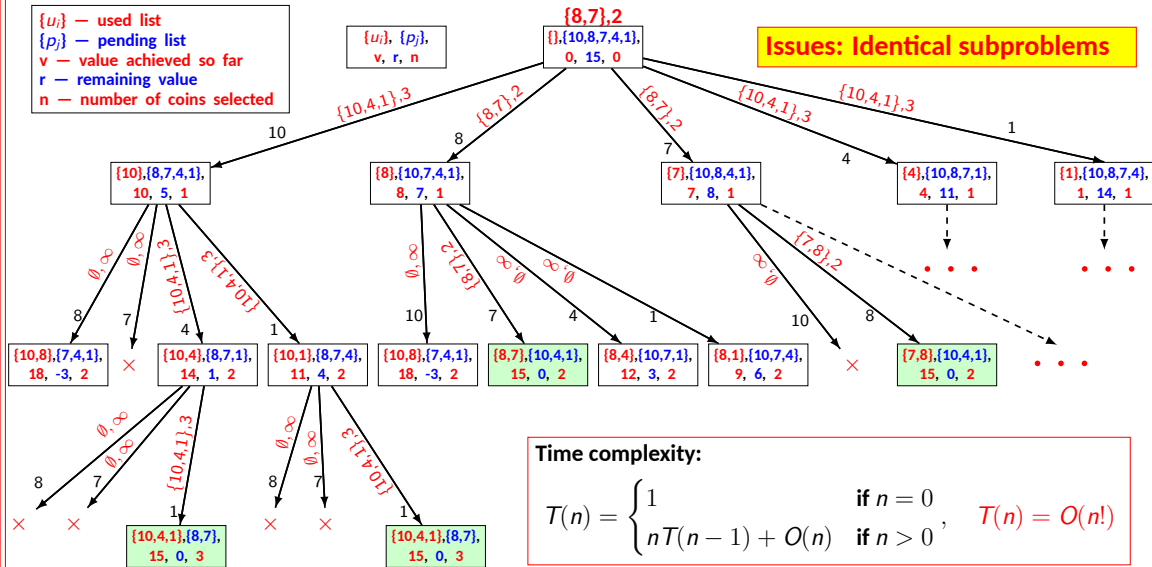
$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected



Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

Issues: Identical subproblems



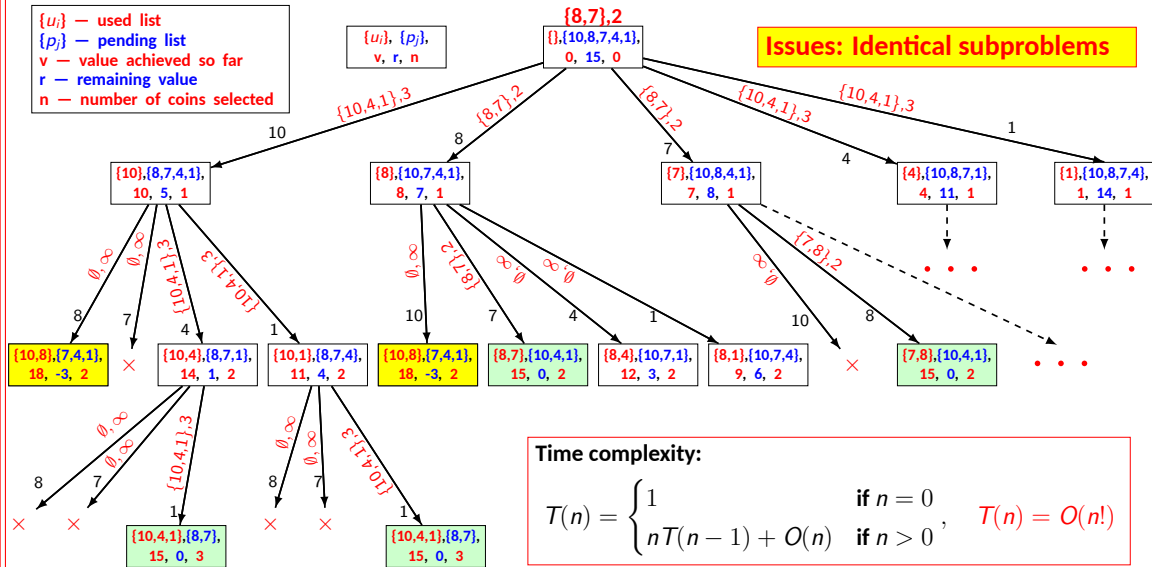
Time complexity:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ nT(n-1) + O(n) & \text{if } n > 0 \end{cases}, \quad T(n) = O(n!)$$

Example

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

Issues: Identical subproblems

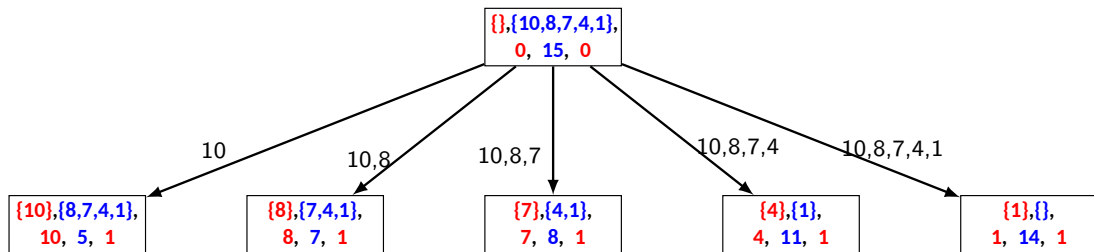


Time complexity:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ nT(n-1) + O(n) & \text{if } n > 0 \end{cases}, \quad T(n) = O(n!)$$

Improved recursive definition

- Two subproblems become identical if **pending list** and the **remaining value match**
- There are a large number of overlapping subproblems, as $P - \{p_1\} - \{p_2\}$ and $P - \{p_2\} - \{p_1\}$ lead to identical subproblems
- Therefore, instead of $P - \{p_i\}$ we do $P - \{p_1, \dots, p_i\}$



Alternate version: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- Alternate recursive definition using inclusion-exclusion principle
- This generates all combinations of coins

Base condition:

1. if $(r = 0)$ return $\langle U, n \rangle$
2. if $(r < 0)$ return $\langle \text{NULL}, \infty \rangle$
3. if $(P = \text{NULL})$ return $\langle \text{NULL}, \infty \rangle$

Recursive steps:(using inclusion-exclusion principle)

1. $X_{\min} = \text{NULL}; \min = \infty;$
2. $\langle X_1, k_1 \rangle = \text{Coins}(U + \{p_1\}, P - \{p_1\}, v + p_1, r - p_1, n + 1)$
3. $\langle X_2, k_2 \rangle = \text{Coins}(U, P - \{p_1\}, v, r, n)$
4. if $(k_1 \leq k_2)$
5. $X_{\min} = X_1;$
6. $\min = k_1;$
7. else
8. $X_{\min} = X_2;$
9. $\min = k_2;$
10. return $\langle X_{\min}, \min \rangle$

Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

8

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

8

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

8

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

-8

$\{10\}, \{7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

8

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

-8

$\{10\}, \{7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

7

$\{10, 7\}, \{4, 1\},$
 $17, -2, 2$

Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

8

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

-8

$\{10\}, \{7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

7

$\{10, 7\}, \{4, 1\},$
 $17, -2, 2$

Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

8

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

-8

$\{10\}, \{7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

7

$\{10, 7\}, \{4, 1\},$
 $17, -2, 2$

-7

$\{10\}, \{4, 1\},$
 $10, 5, 1$

Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

8

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

-8

$\{10\}, \{7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

7

$\{10, 7\}, \{4, 1\},$
 $17, -2, 2$

-7

$\{10\}, \{4, 1\},$
 $10, 5, 1$

4

$\{10, 4\}, \{1\},$
 $14, 1, 2$

Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

8

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

-8

$\{10\}, \{7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

7

$\{10, 7\}, \{4, 1\},$
 $17, -2, 2$

-7

$\{10\}, \{4, 1\},$
 $10, 5, 1$

4

$\{10, 4\}, \{1\},$
 $14, 1, 2$

1

$\{10, 4, 1\}, \{\},$
 $15, 0, 3$

Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

8

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

-8

$\{10\}, \{7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

7

$\{10, 7\}, \{4, 1\},$
 $17, -2, 2$

-7

$\{10\}, \{4, 1\},$
 $10, 5, 1$

4

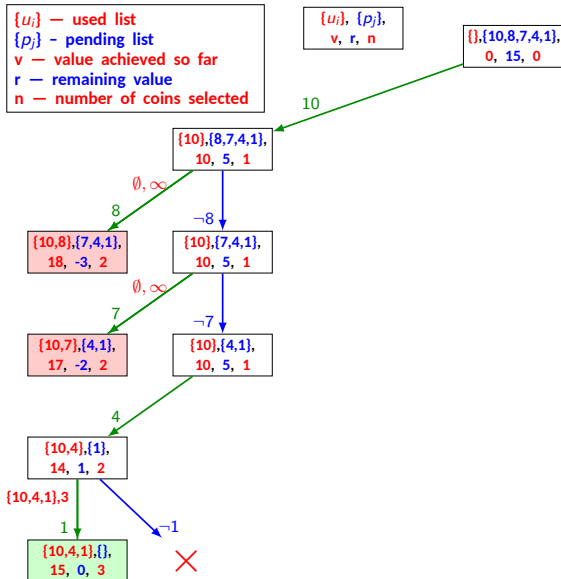
$\{10, 4\}, \{1\},$
 $14, 1, 2$

$\{10, 4, 1\}, 3$

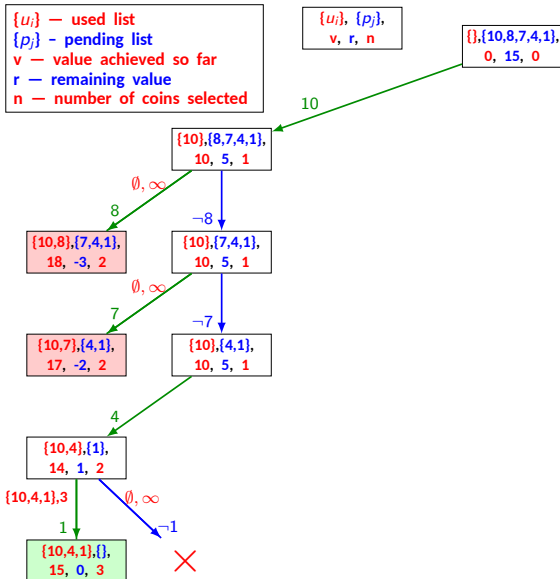
1

$\{10, 4, 1\}, \{\},$
 $15, 0, 3$

Example: Generation of all combinations



Example: Generation of all combinations



Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

8

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

-8

$\{10\}, \{7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

7

$\{10, 7\}, \{4, 1\},$
 $17, -2, 2$

-7

$\{10\}, \{4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\{10, 4, 1\}, 3$

4

$\{10, 4\}, \{1\},$
 $14, 1, 2$

$\emptyset, \infty$

1

$\{10, 4, 1\}, \{\},$
 $15, 0, 3$

-1

×

Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

10

$\{10\}, \{8, 7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\emptyset, \infty$

8

$\emptyset, \infty$

$\{10, 8\}, \{7, 4, 1\},$
 $18, -3, 2$

$\{10\}, \{7, 4, 1\},$
 $10, 5, 1$

7

$\emptyset, \infty$

$\{10, 7\}, \{4, 1\},$
 $17, -2, 2$

$\{10\}, \{4, 1\},$
 $10, 5, 1$

$\{10, 4, 1\}, 3$

4

$\emptyset, \infty$

$\{10, 4\}, \{1\},$
 $14, 1, 2$

$\{10\}, \{1\},$
 $10, 5, 1$

$\{10, 4, 1\}, 3$

1

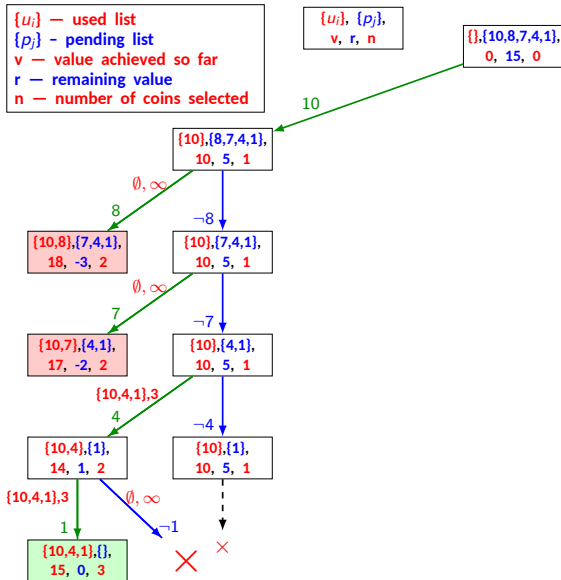
$\emptyset, \infty$

$\neg 1$

$\{10, 4, 1\}, \{\},$
 $15, 0, 3$

×

Example: Generation of all combinations

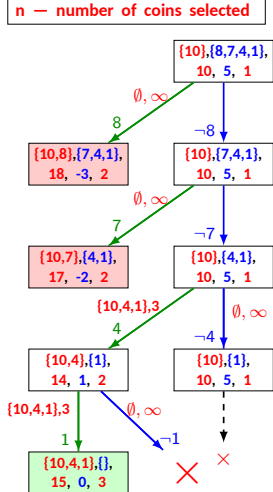


Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

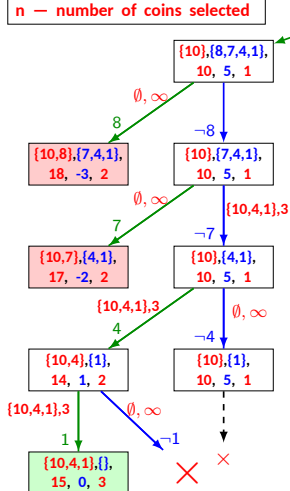


Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$

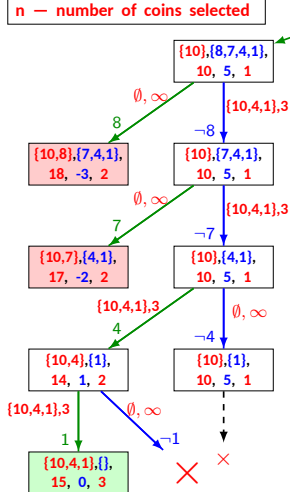


Example: Generation of all combinations

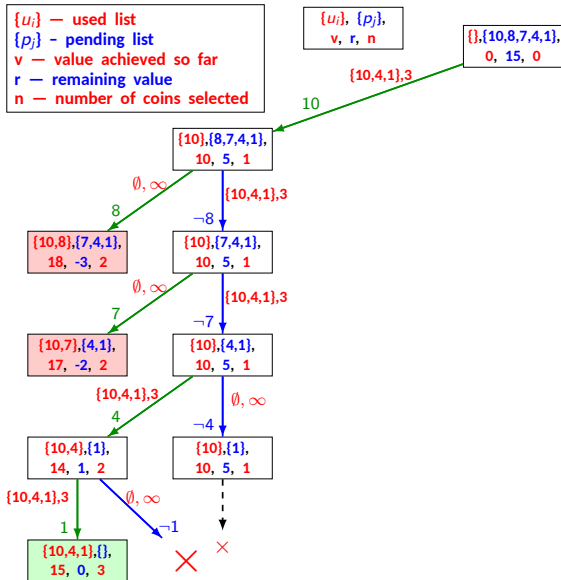
$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

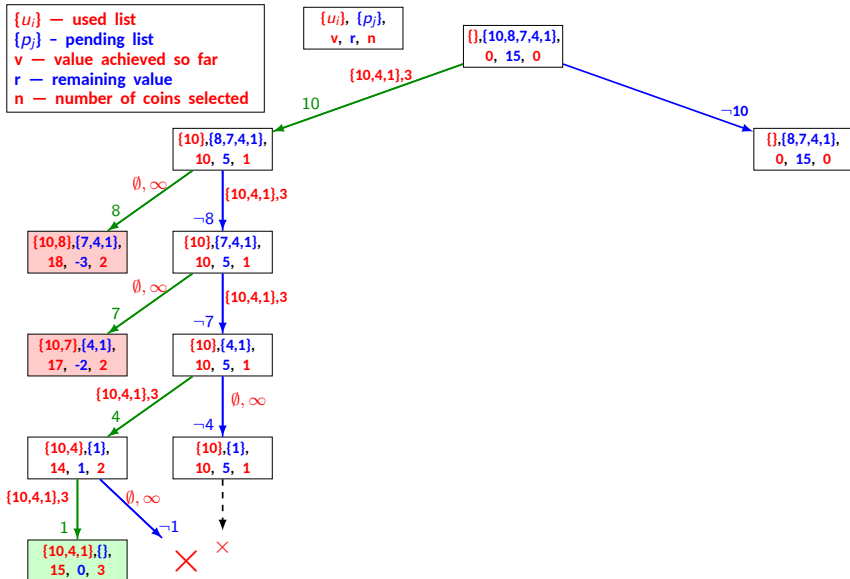
$\{\}, \{10, 8, 7, 4, 1\},$
 $0, 15, 0$



Example: Generation of all combinations



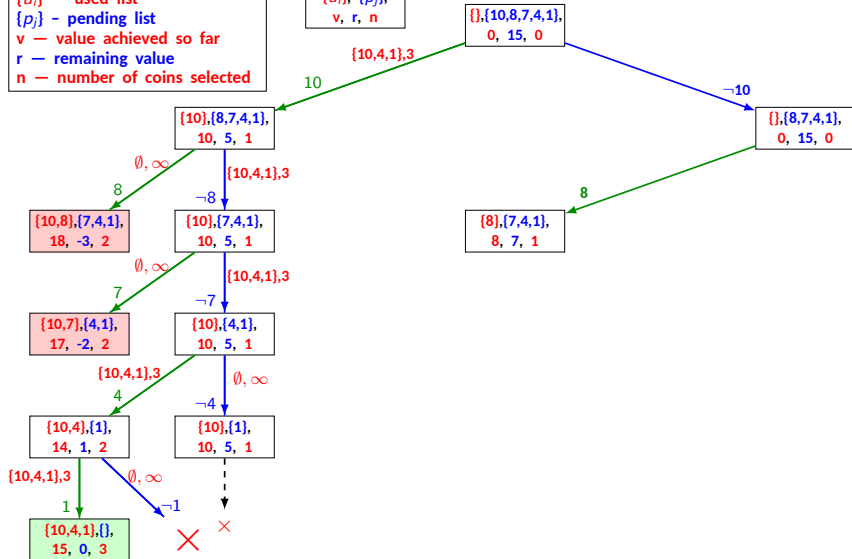
Example: Generation of all combinations



Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

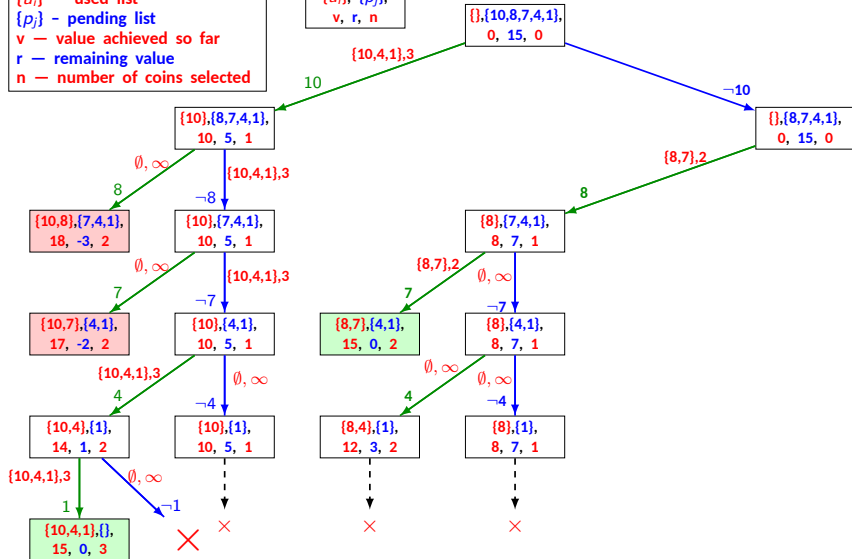
$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n



Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

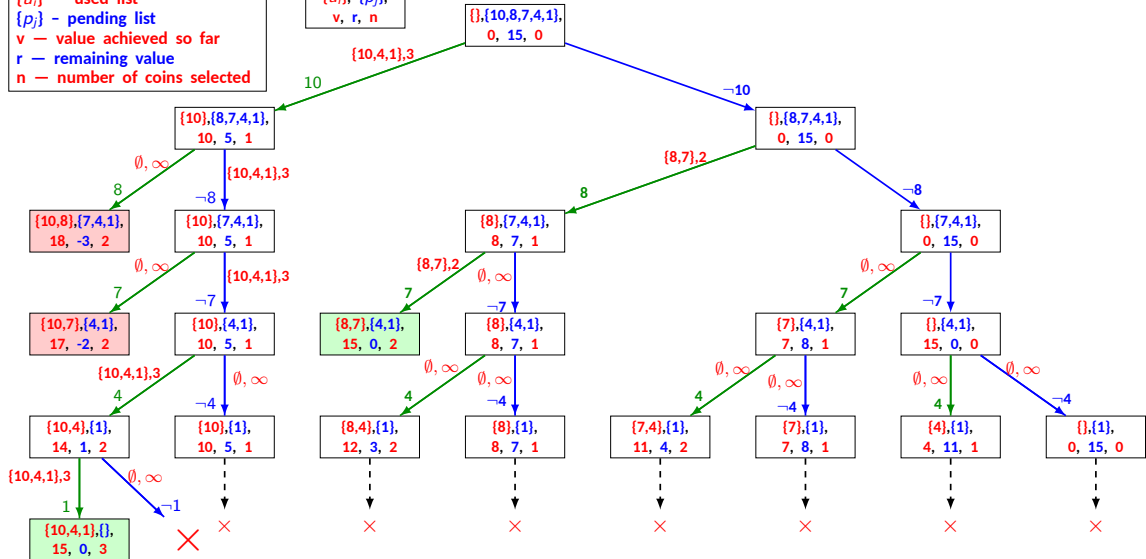
$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n



Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

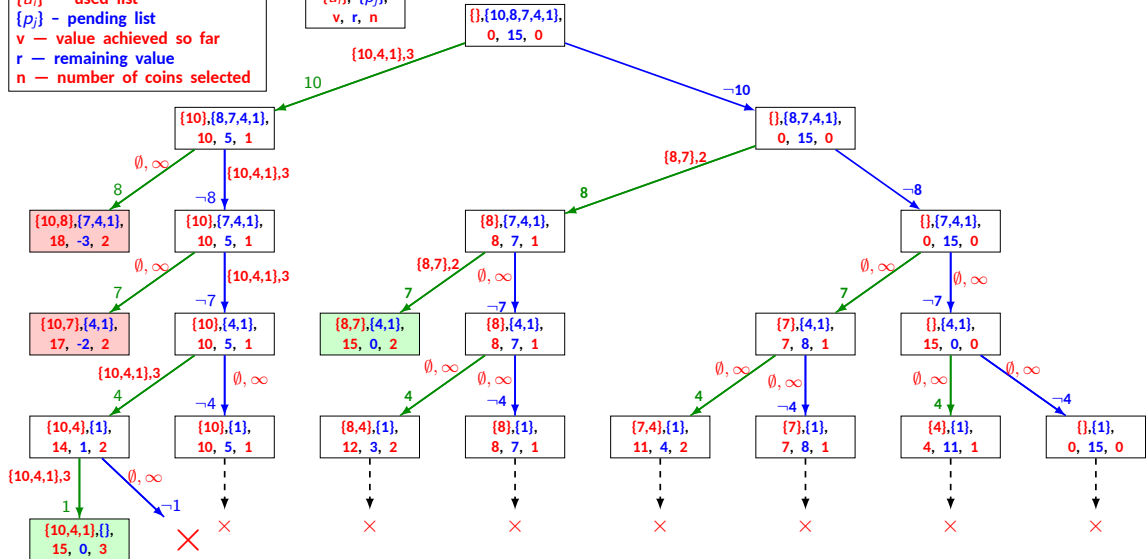
$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n



Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

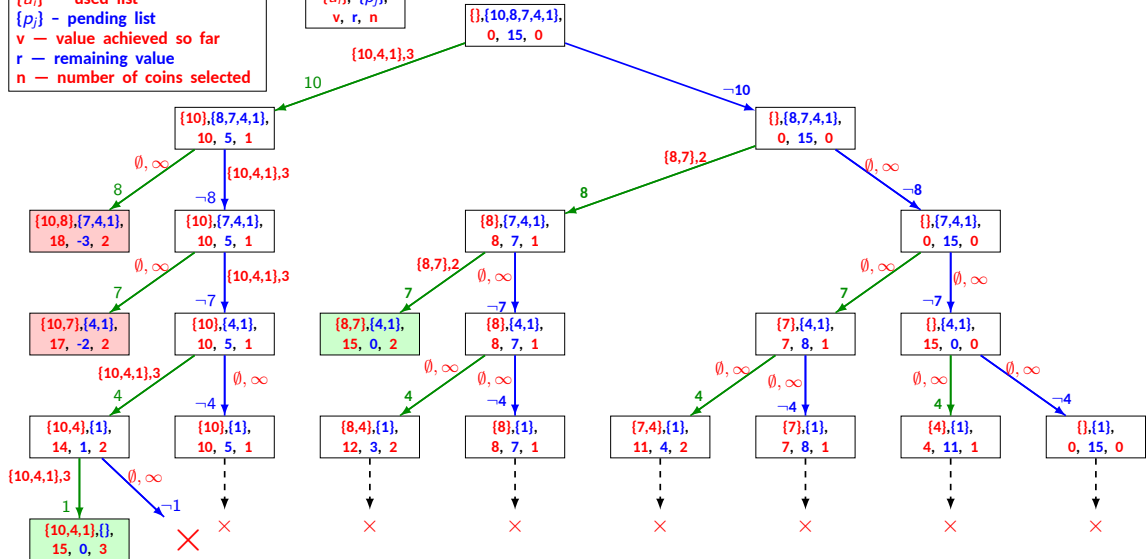
$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n



Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

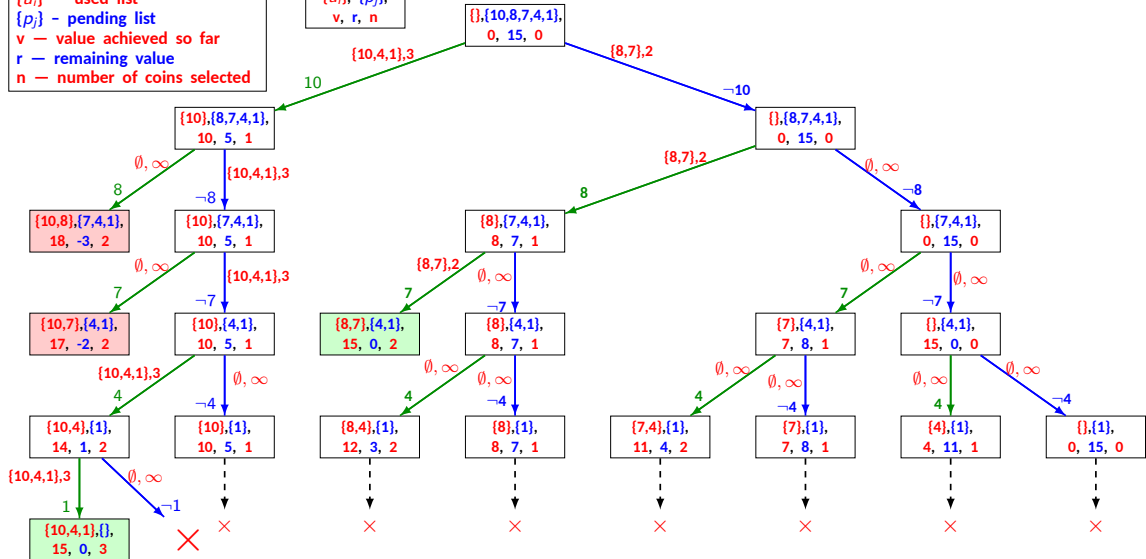
$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n



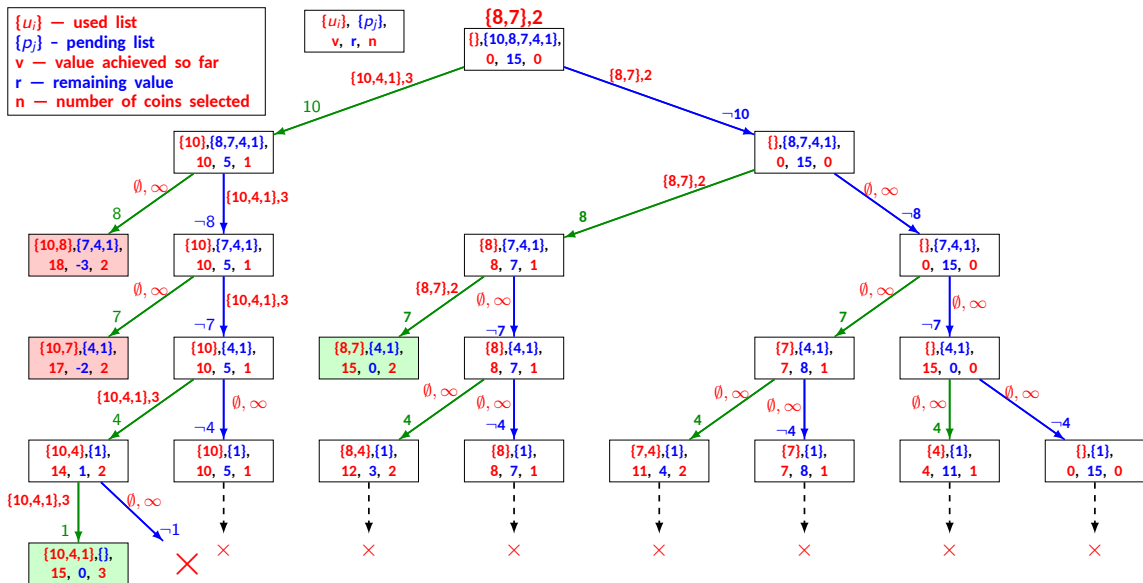
Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n



Algorithms



Example: Generation of all combinations

$\{u_i\}$ — used list
 $\{p_j\}$ — pending list
 v — value achieved so far
 r — remaining value
 n — number of coins selected

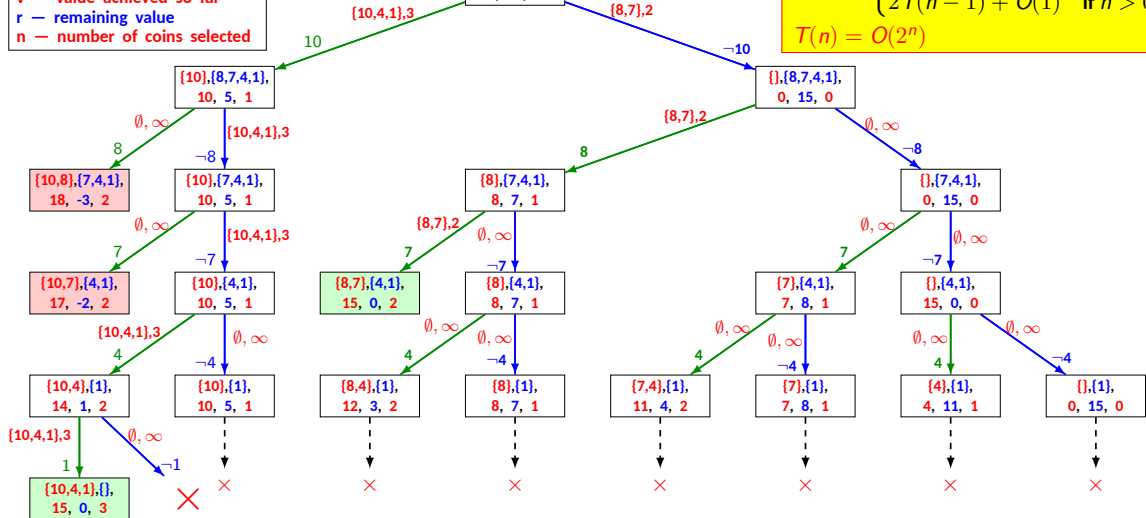
$\{u_i\}, \{p_j\},$
 v, r, n

$\{8,7\},2$

$\{\}, \{10,8,7,4,1\},$
 $0, 15, 0$

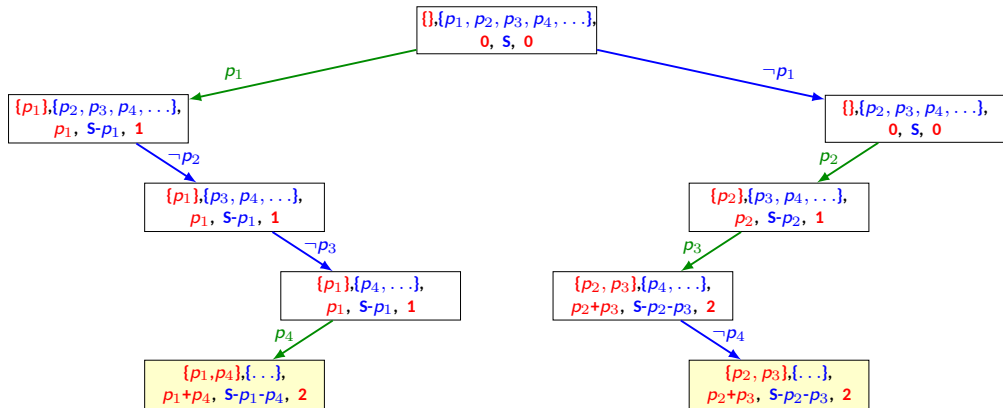
$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 2T(n-1) + O(1) & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

$$T(n) = O(2^n)$$



Identical subproblems

- A subproblem can be distinguished based on the **Pending** list and the **remaining value**
- If $p_1 + p_4 = p_2 + p_3$ holds, then the following two paths yield identical subproblems
- Solution for identical subproblems can be memorized and reused



Memoization: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

Initialization:

1. $\text{mTable}[i,j].\text{flag} = 0$
 $\text{mTable}[i,j].\text{Sol} = \text{NULL}$
 $\forall 1 \leq i \leq |X|,$
 $\forall 1 \leq j \leq k$

Base condition:

0. if $(|\text{mTable}[|P|,r]|.\text{flag} == 1)$
 $A = \text{mTable}[|P|, r].\text{Sol}$
 $\text{size} = (A == \text{NULL}) ? \infty : |A|;$
return $\langle A, \text{size} \rangle$
1. if $(r = 0)$ return $\langle U, n \rangle$
2. if $(r < 0)$ return $\langle \text{NULL}, \infty \rangle$
3. if $(P = \text{NULL})$ return $\langle \text{NULL}, \infty \rangle$

Recursive steps:

1. $X_{\min} = \text{NULL}; \min = \infty;$
2. $\langle X_1, k_1 \rangle = \text{Coins}(U + \{p_1\}, P - \{p_1\}, v + p_1, r - p_1, n + 1)$
3. $\langle X_2, k_2 \rangle = \text{Coins}(U, P - \{p_1\}, v, r, n)$
4. if $(k_1 \leq k_2)$
5. $X_{\min} = X_1; \min = k_1;$
6. else
7. $X_{\min} = X_2; \min = k_2;$
8. if $(X_{\min} \neq \text{NULL})$ $\text{mTable}[|P|,r].\text{Sol} = [X_{\min} - P]$
9. $\text{mTable}[|P|,r].\text{flag} = 1$
10. return $\langle X_{\min}, \min \rangle$

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$																
1																
2																
4																
7																
8																
10																

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}, r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$															
2	0 $\emptyset$															
4	0 $\emptyset$															
7	0 $\emptyset$															
8	0 $\emptyset$															
10	0 $\emptyset$															

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 0	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 0	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 0	1 1	∞ -	2 2,1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 0	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	3 4,2,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	3 4,2,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	1 7	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	3 4,2,1	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	1 7	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	3 4,2,1	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	1 7	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	3 4,2,1	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	1 7	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	3 4,2,1	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	1 7	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 7,8
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

Number of coins
Solution set

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	3 4,2,1	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	1 7	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 7,8
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 7,8

Memoization Example: $\langle X, k \rangle = \text{Coins}(U, P, v, r, n)$

- $P = \{10, 8, 7, 4, 2, 1\}$, $r = 15$

P={10,8,7,4,2,1}, r=15														Number of coins Solution set		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	0 $\emptyset$	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL
1	0 $\emptyset$	1 1	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ NULL
2	0 $\emptyset$	1 1	∞ -	2 2,1	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ NULL	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
4	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	3 4,2,1	∞ NULL	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
7	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	1 7	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ NULL
8	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 4,1	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 7,8
10	0 $\emptyset$	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	∞ -	2 7,8

Time complexity: $O(nS)$. This is pseudo-polynomial. S is exponential wrt its input size ie. $\lg S$.

Pruning recursion tree

- Maintain a global variable CB (current best)
- CB may be initialized to ∞
- Recursion is executed in depth-first manner
- Note down the first valid solution
- **[PRUNING]** At any point of time during recursion execution, if it is sure that no better solution can be obtained from current node, prune the subtree rooted at the current node
- This does not improve the worst case complexity, however, there is improvement in execution time of the algorithm

Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$

Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$

$\langle \text{Sum}, \text{Number of coin used} \rangle$

CB = ∞

15,0

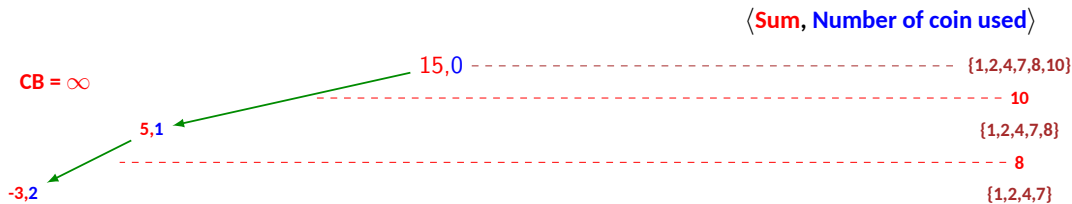
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



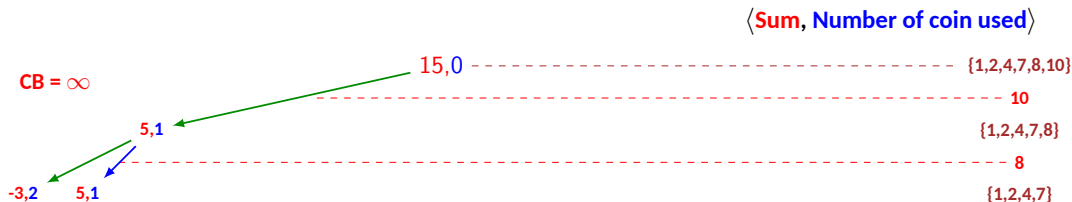
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



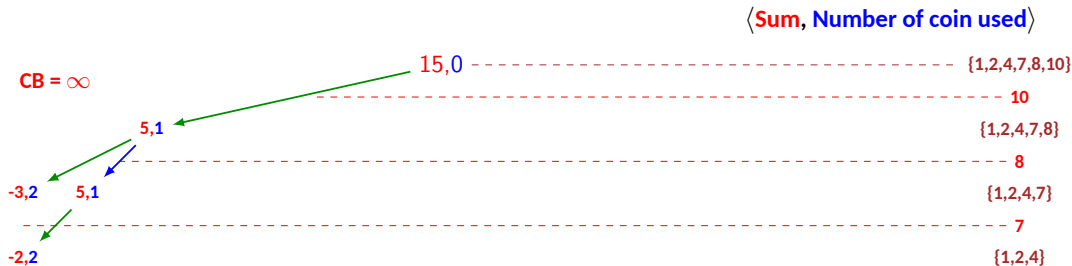
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



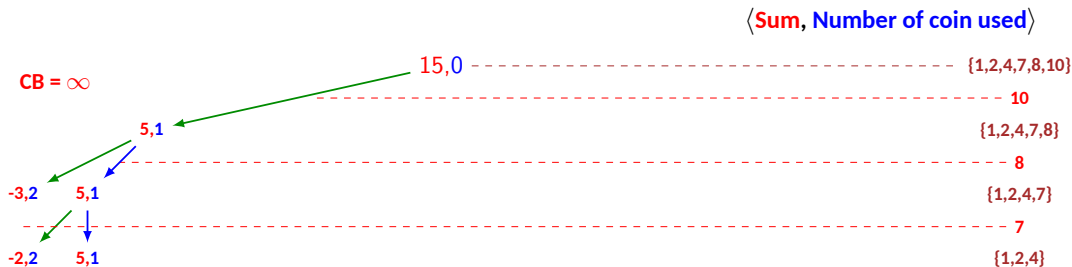
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



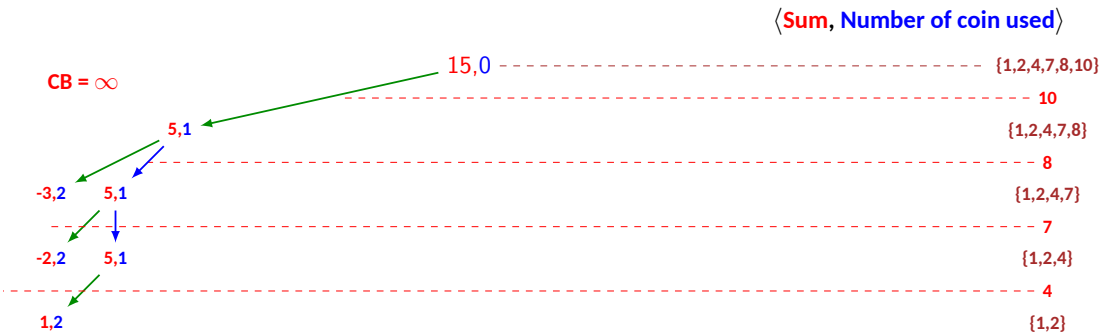
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



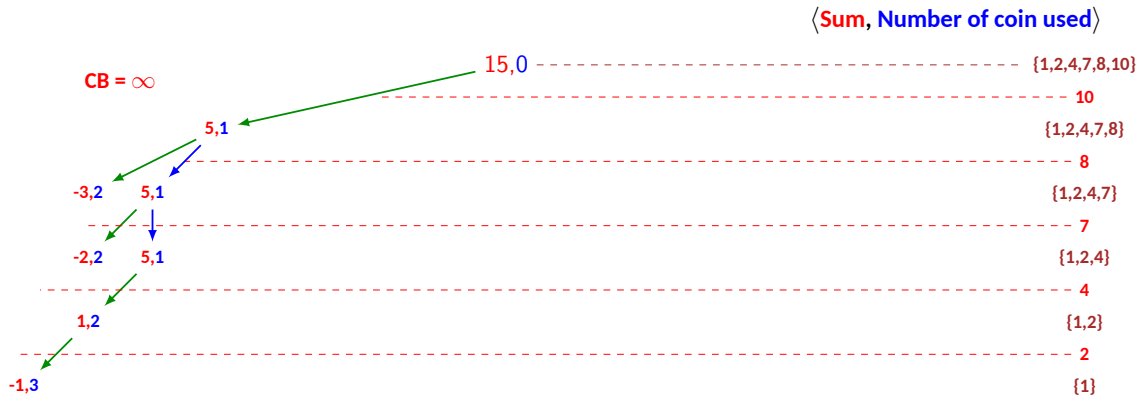
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



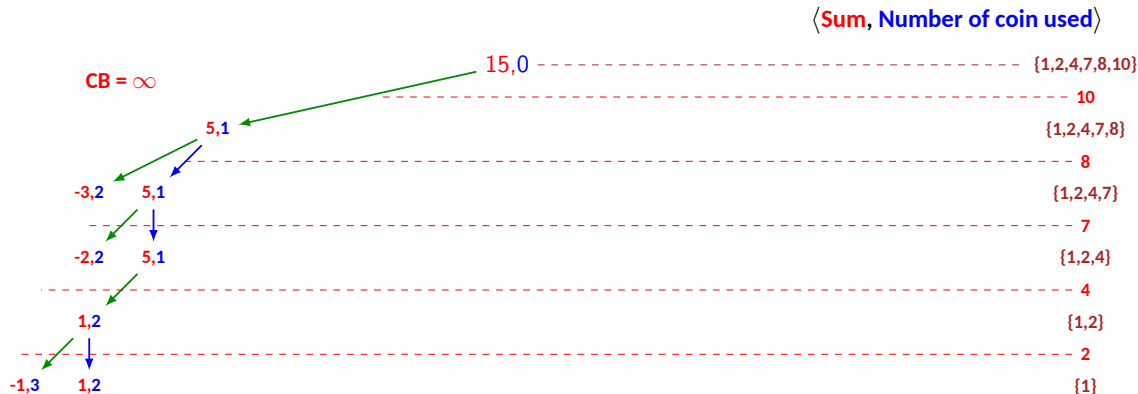
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



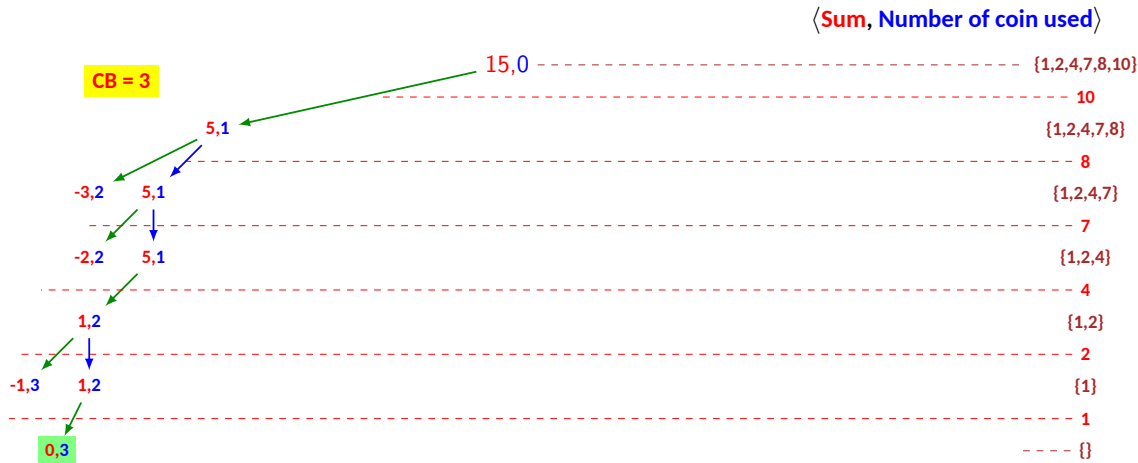
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



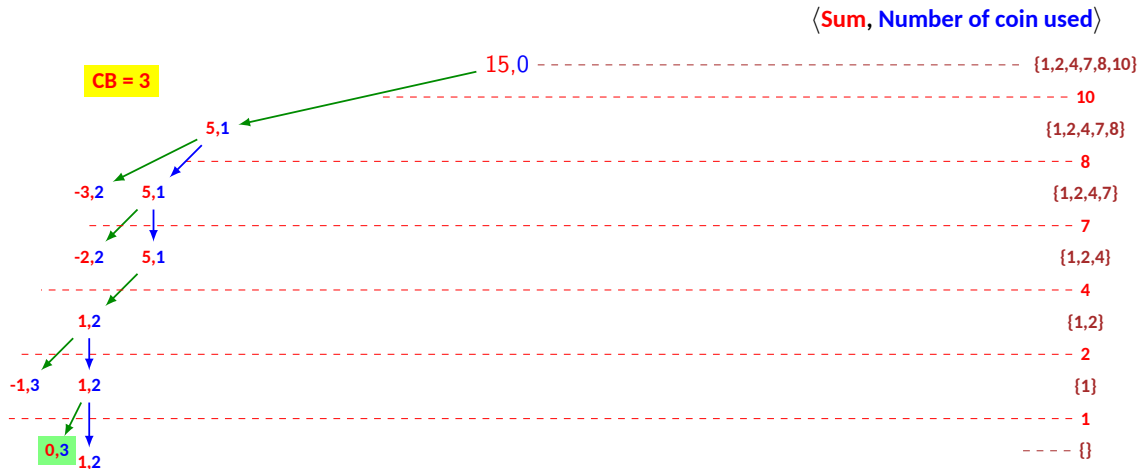
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



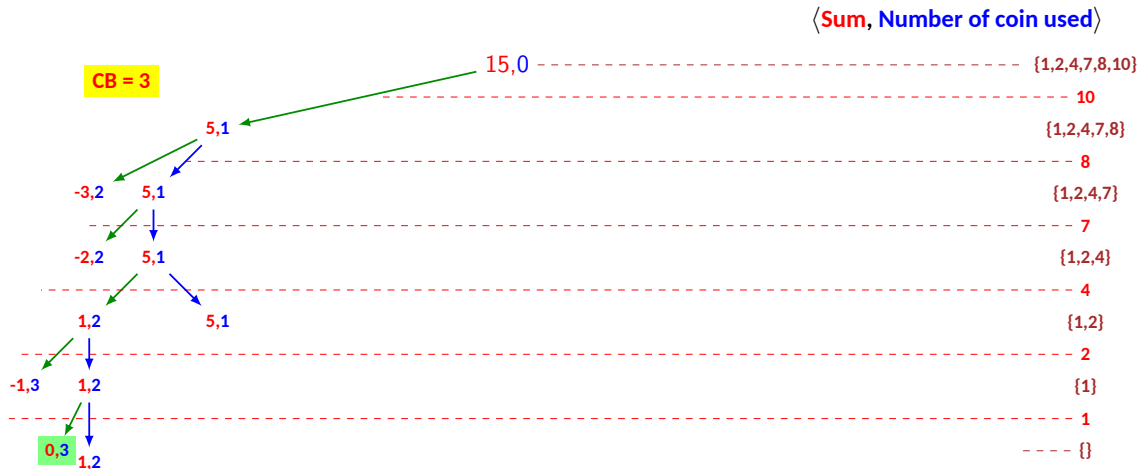
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



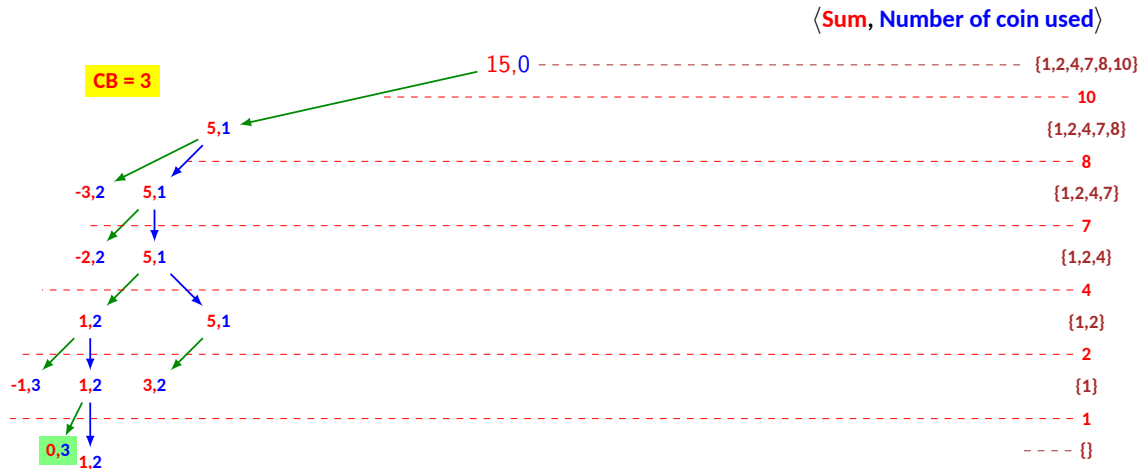
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



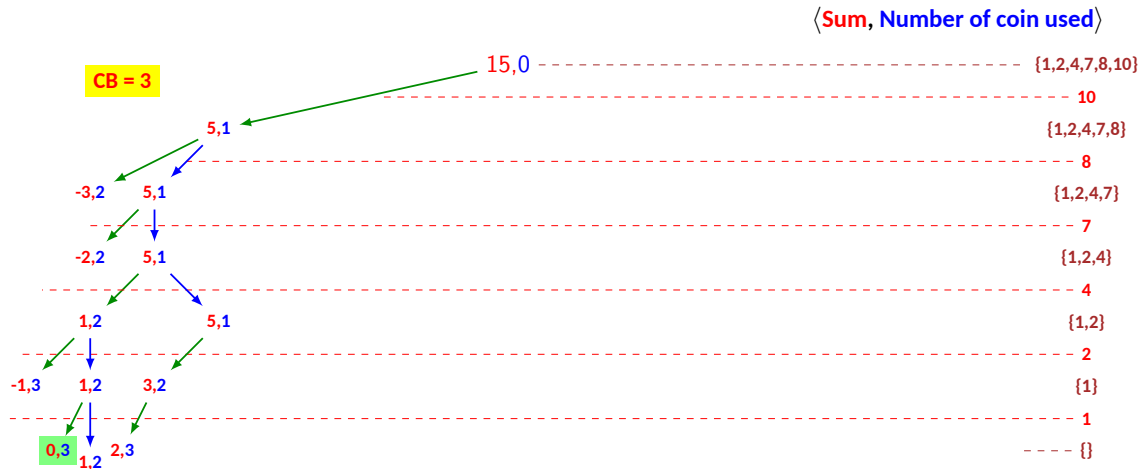
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



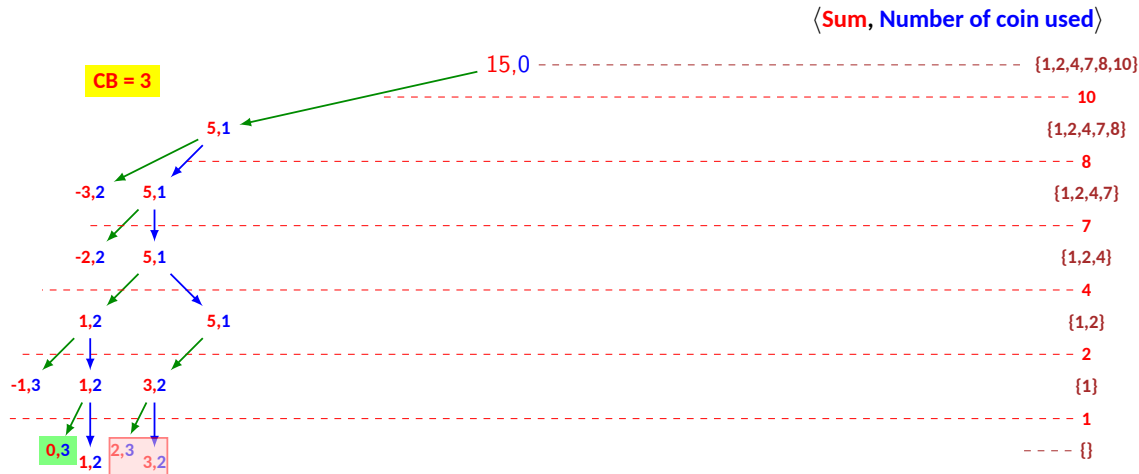
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



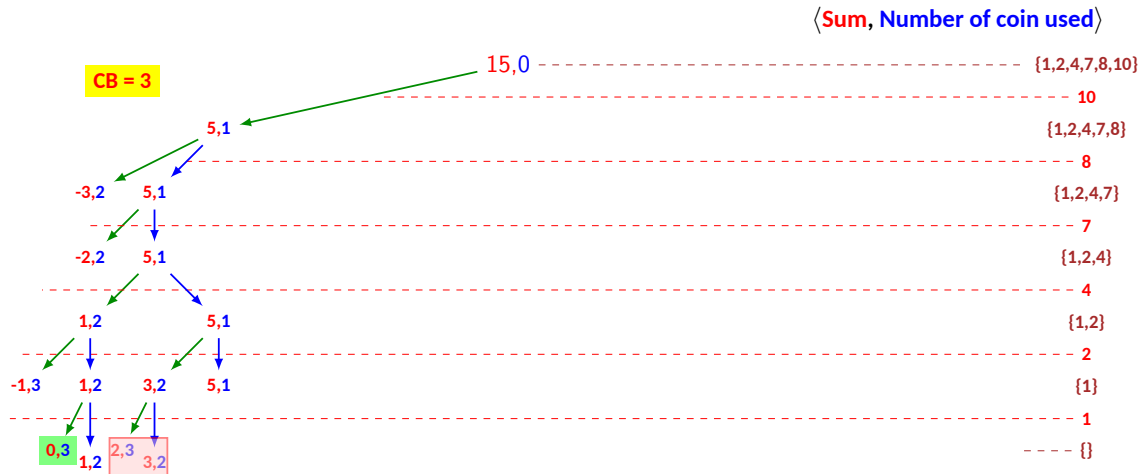
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



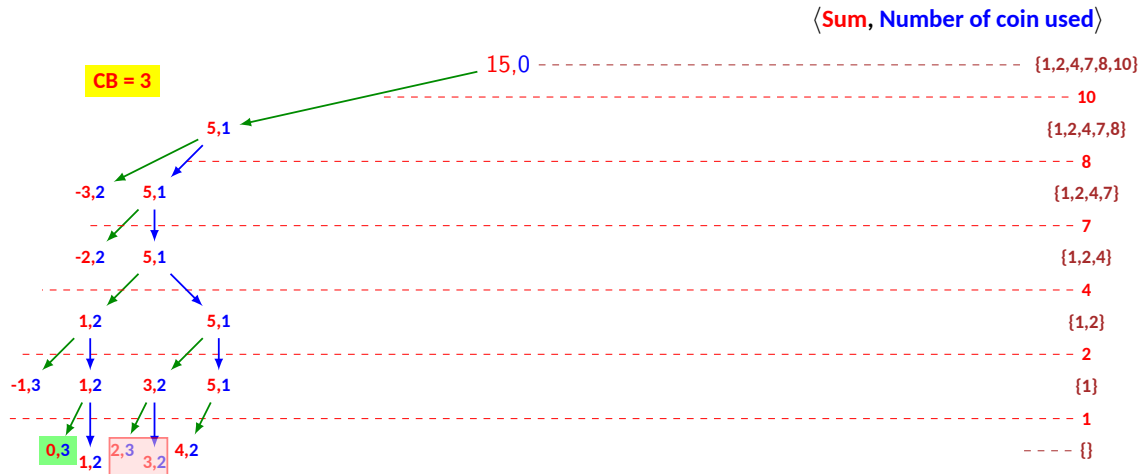
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



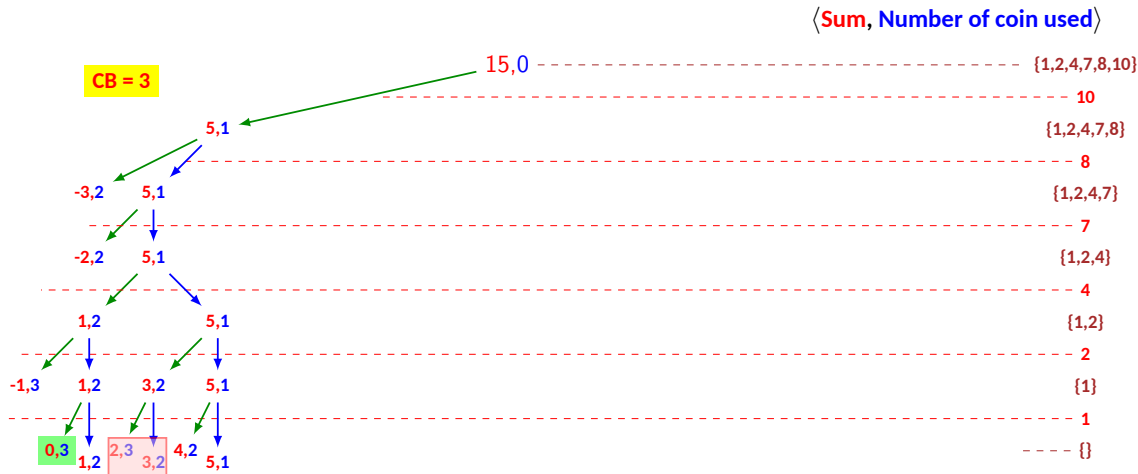
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



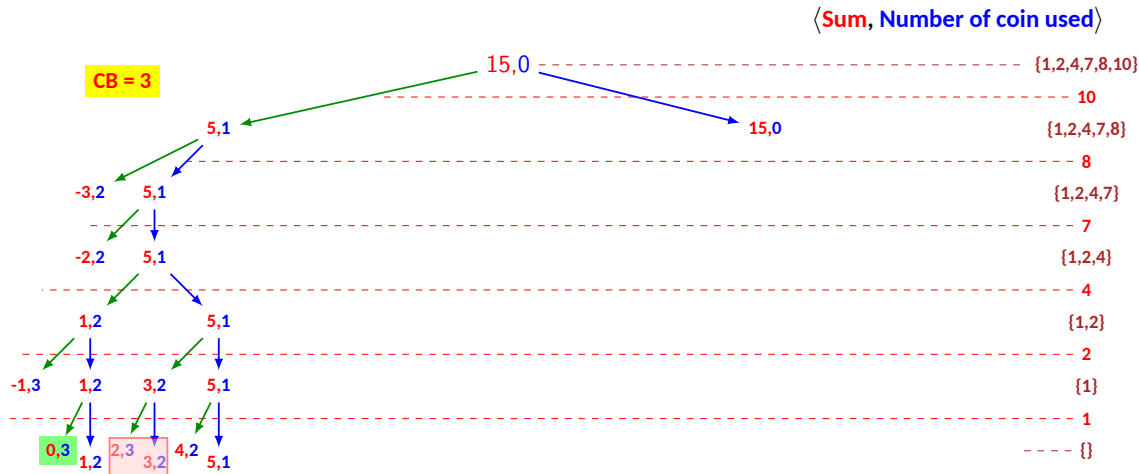
Algorithms

- 4



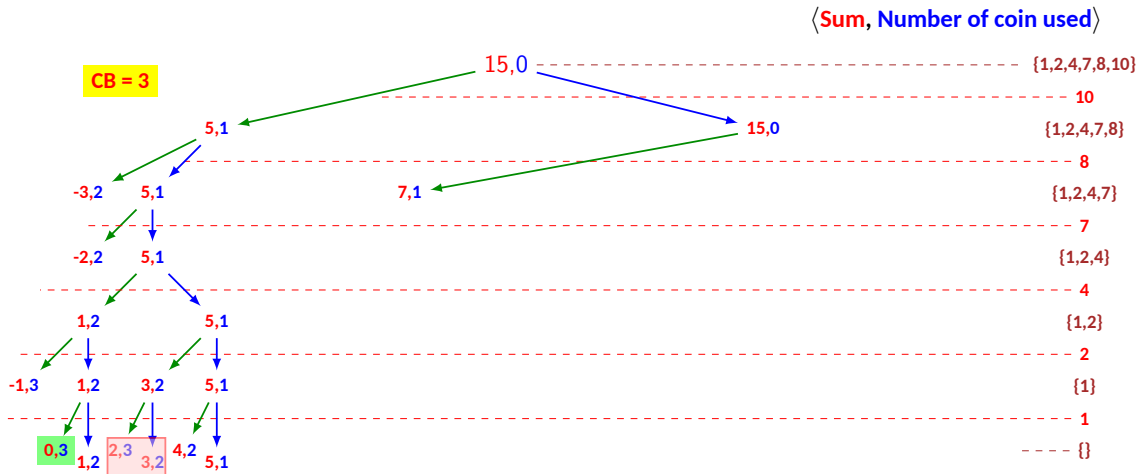
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



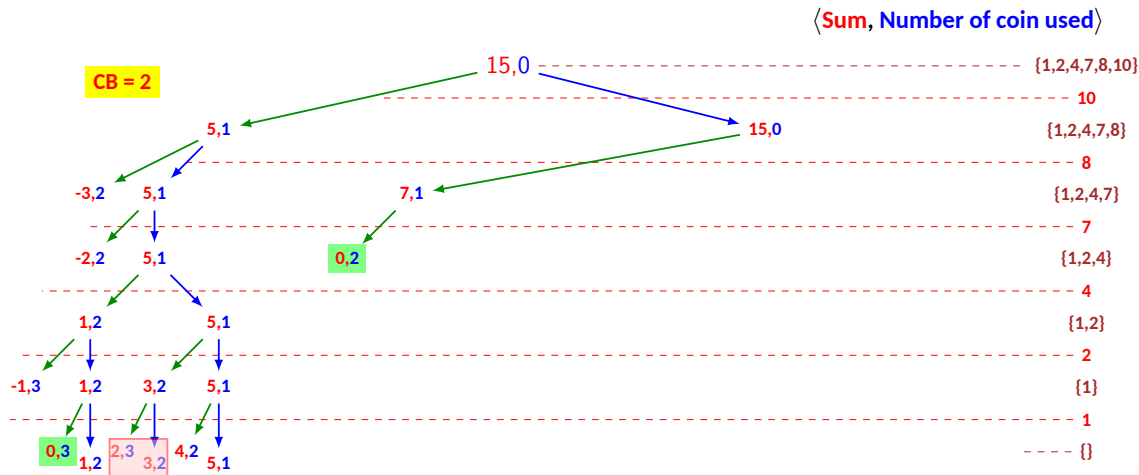
Coin change: Recursion tree Pruning

- **Example:** $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}, S = 15$



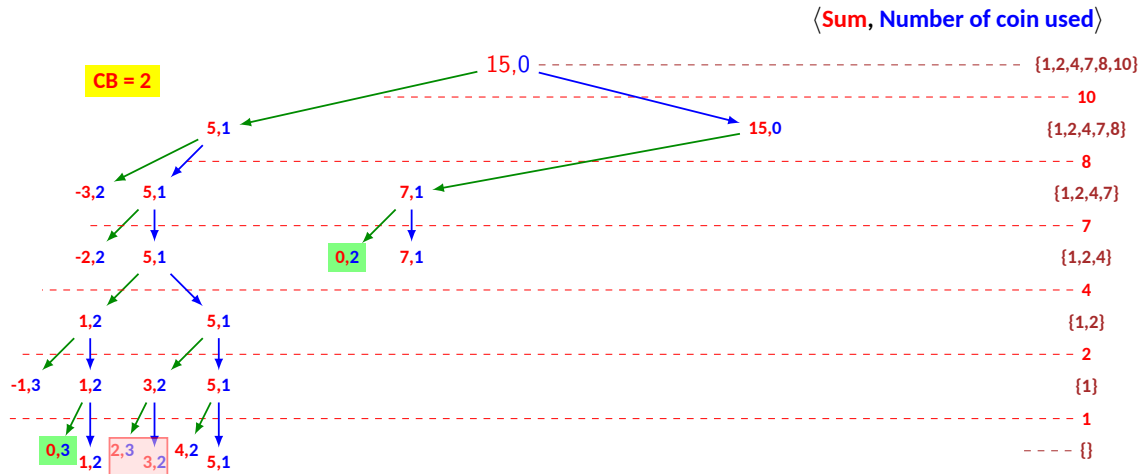
Coin change: Recursion tree Pruning

- **Example:** $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



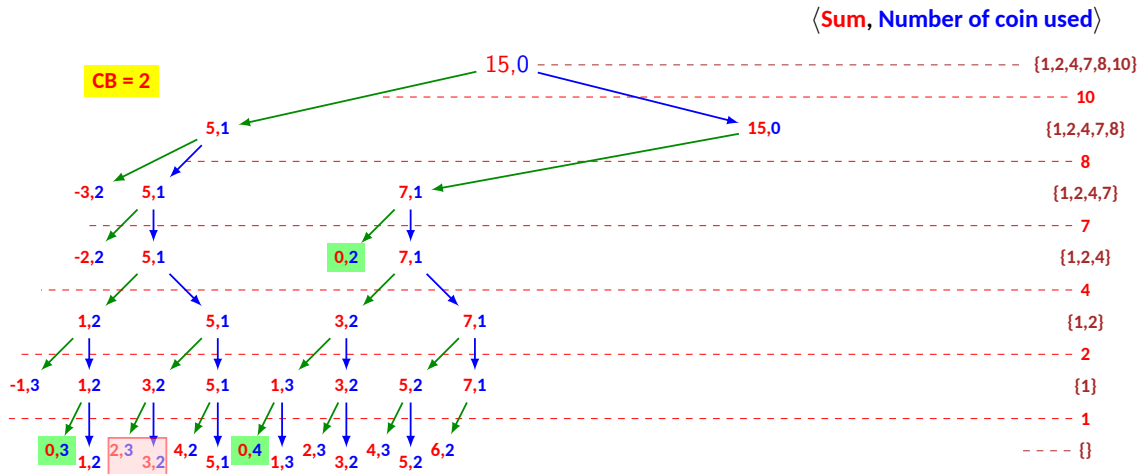
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



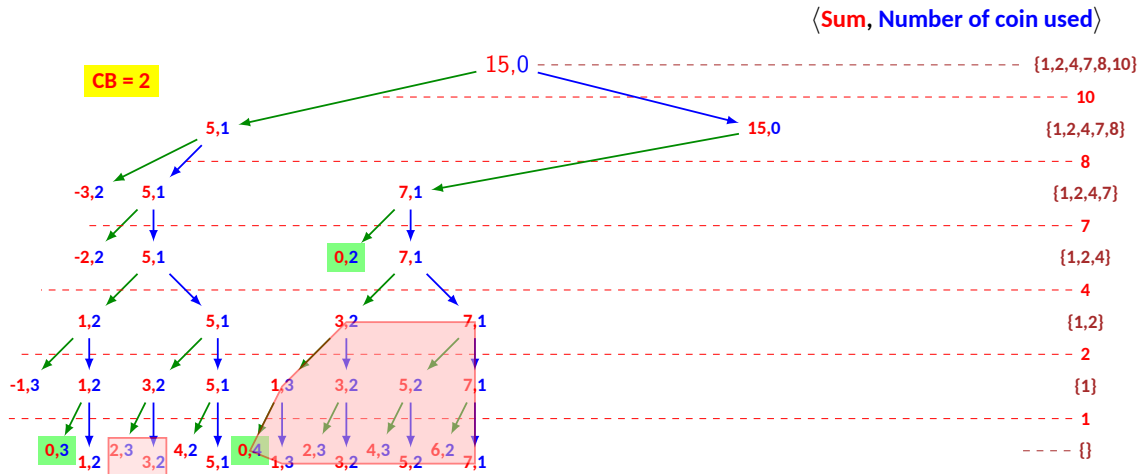
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



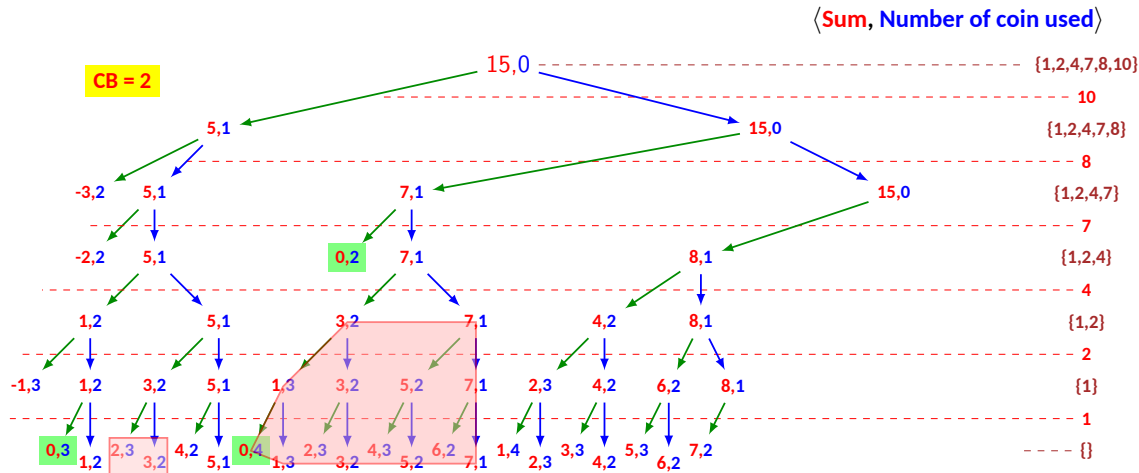
Coin change: Recursion tree Pruning

- **Example:** $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



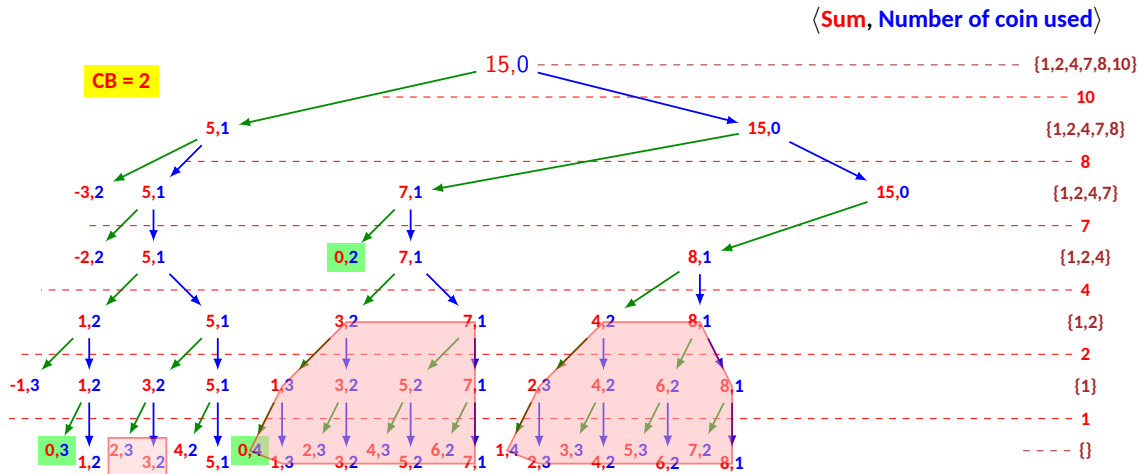
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



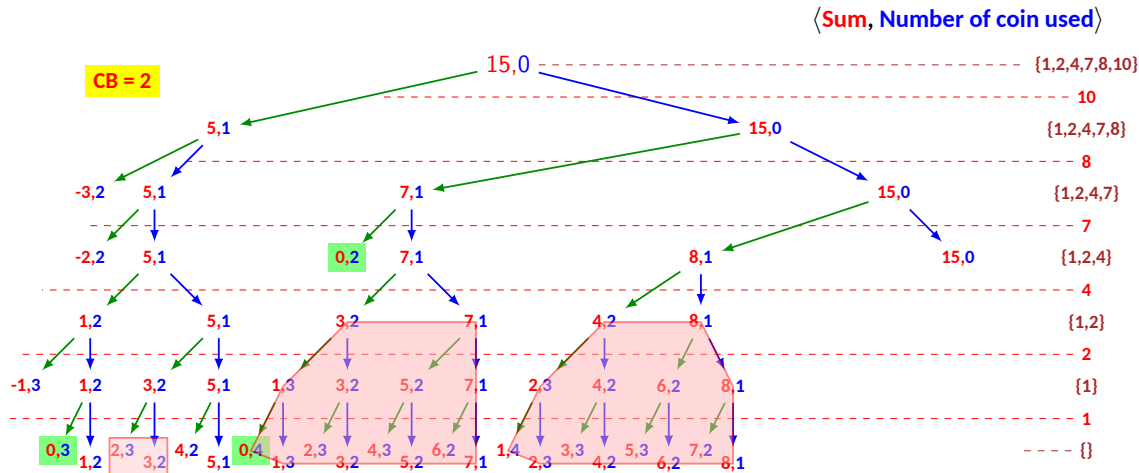
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



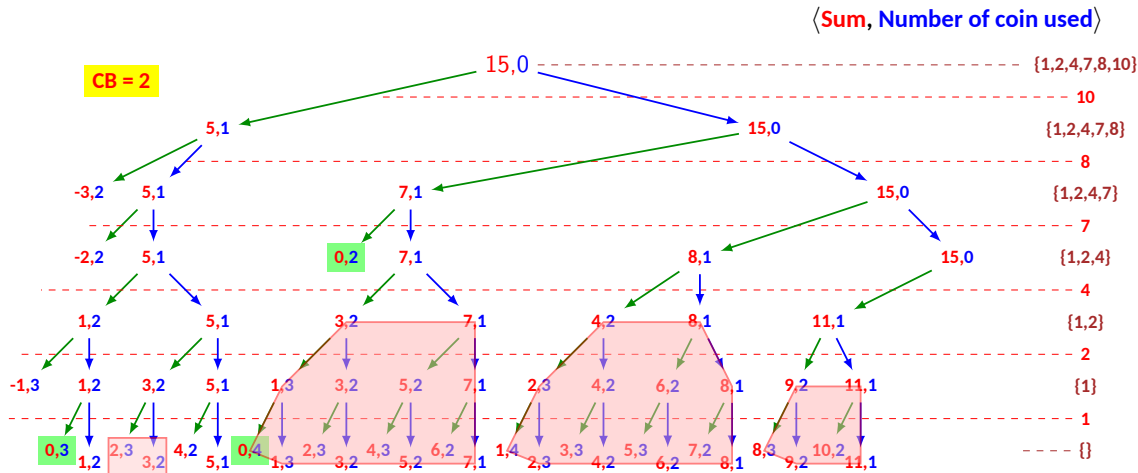
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



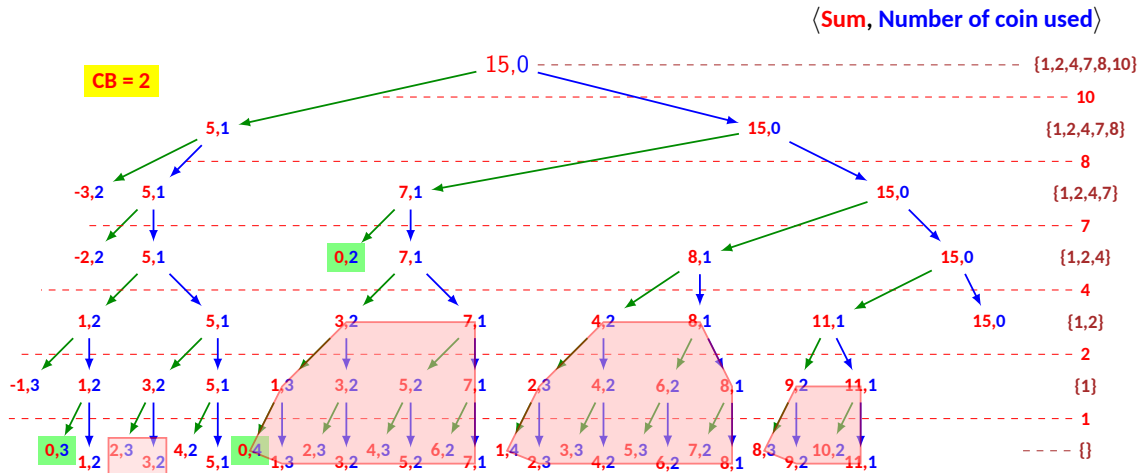
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



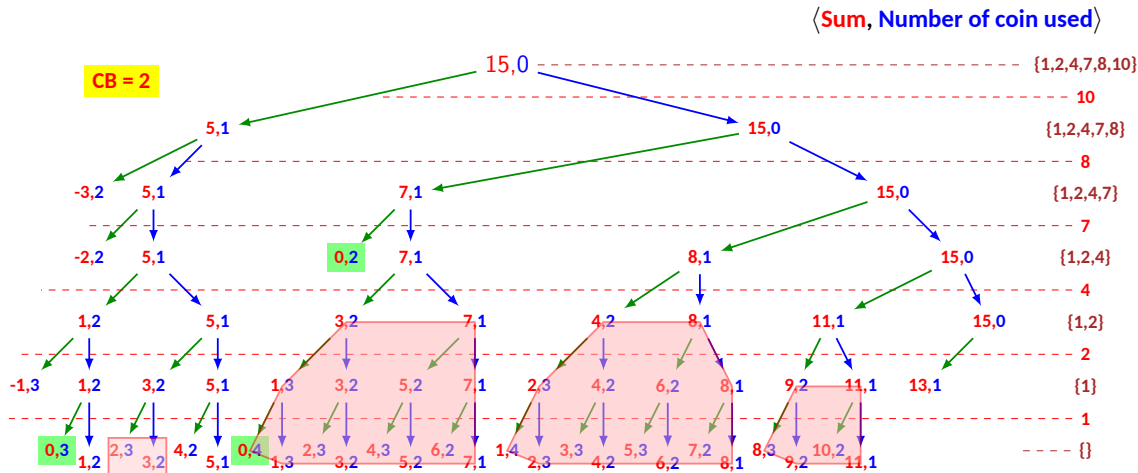
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



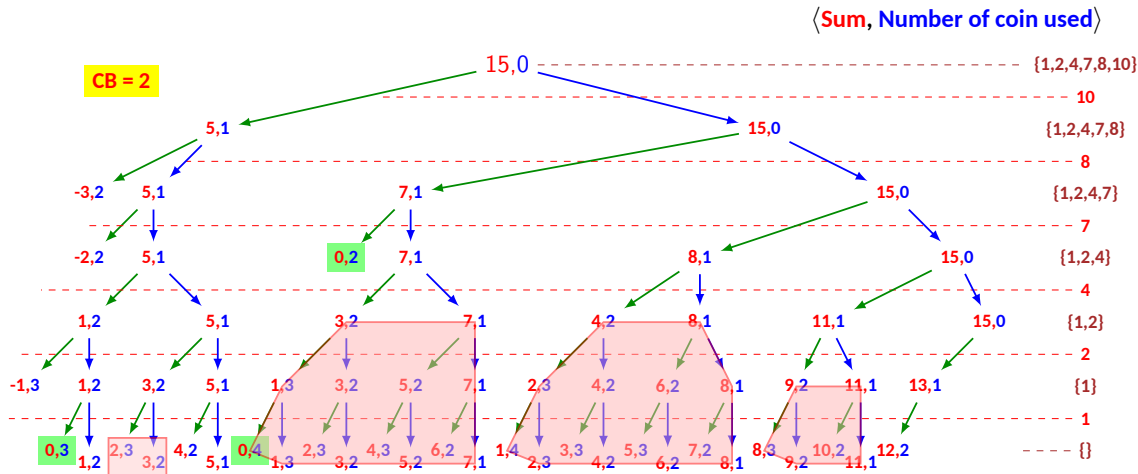
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



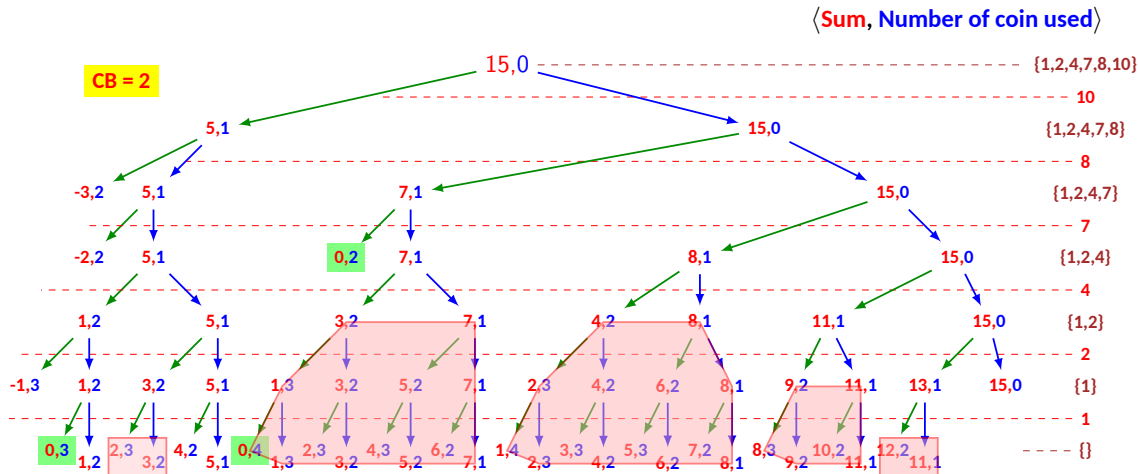
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



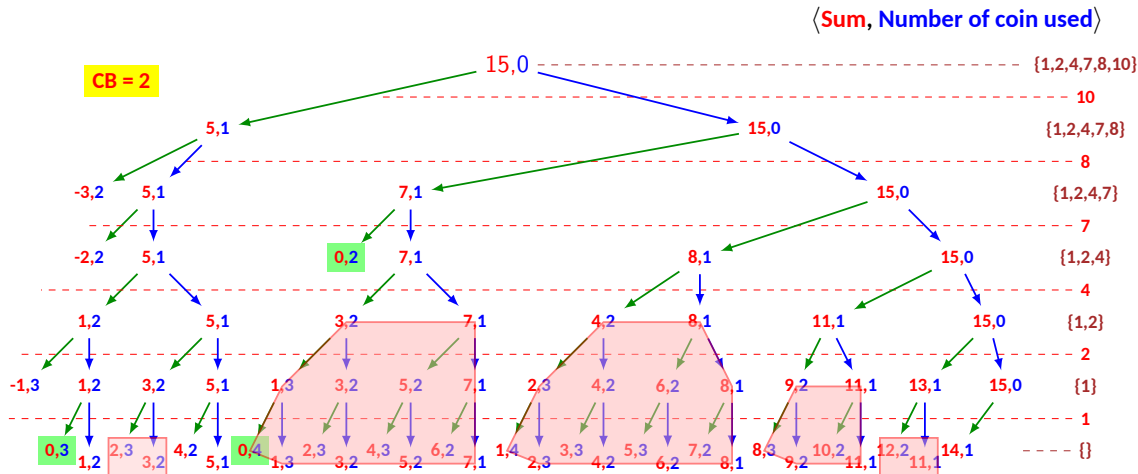
Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



Coin change: Recursion tree Pruning

- Example: $C = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$, $S = 15$



Coin change: Bound condition

- Initialize C =set of coins, $\text{currBest}=\infty$
- $\text{Coin}(S, n, \text{count})$:
 1. if $S < 0$ return
 2. if $(S == 0)$ { $\text{currBest} = \text{currBest} > \text{count} ? \text{count} : \text{currBest}$; return }
 3. if $(\text{count}+1 < \text{currBest})$
 4. $\text{Coin}(S-c_1, n-1, \text{count}+1)$
 5. $\text{Coin}(S, n-1, \text{count})$

Coin change: Bound condition

- Initialize C =set of coins, $currBest = \infty$
- $Coin(S, n, count)$:
 1. if $S < 0$ return
 2. if $(S == 0)$ { $currBest = currBest > count ? count : currBest$; return }
 3. if $(count+1 < currBest)$
 4. $Coin(S - c_1, n-1, count+1)$
 5. $Coin(S, n-1, count)$
- Other bound conditions:

Coin change: Bound condition

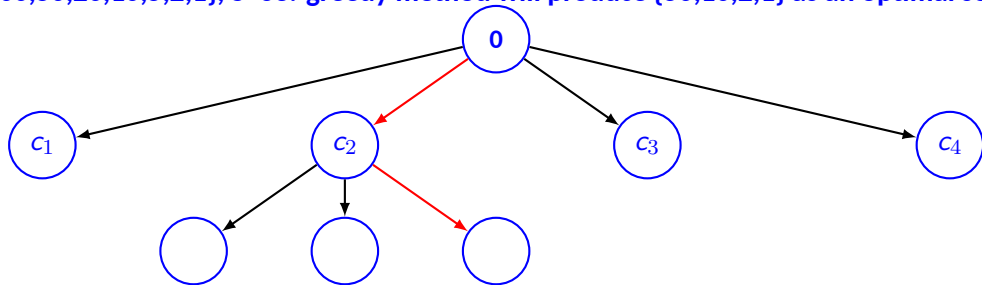
- Initialize C =set of coins, $\text{currBest}=\infty$
- $\text{Coin}(S, n, \text{count})$:
 1. if $S < 0$ return
 2. if $(S == 0)$ { $\text{currBest} = \text{currBest} > \text{count} ? \text{count} : \text{currBest}$; return }
 3. if $(\text{count}+1 < \text{currBest})$
 4. $\text{Coin}(S-c_1, n-1, \text{count}+1)$
 5. $\text{Coin}(S, n-1, \text{count})$
- Other bound conditions:
 - $\text{count} + \left\lceil \frac{S}{\max\{C_{\text{remaining}}\}} \right\rceil < \text{currBest}$

Coin change: Bound condition

- Initialize C =set of coins, $\text{currBest}=\infty$
- **Coin(S, n, count):**
 1. if $S < 0$ return
 2. if $(S == 0)$ { $\text{currBest} = \text{currBest} > \text{count} ? \text{count} : \text{currBest}$; return }
 3. if ($\text{count}+1 < \text{currBest}$)
 4. Coin($S-c_1, n-1, \text{count}+1$)
 5. Coin($S, n-1, \text{count}$)
- Other bound conditions:
 - $\text{count} + \left\lceil \frac{S}{\max\{C_{\text{remaining}}\}} \right\rceil < \text{currBest}$
 - $\text{count} + j < \text{currBest}$, where $j = \arg \max_j \left[\left(\sum_{i=1}^j c_i \right) < S \right]$, assuming sorted coin set

Greedy methods

- Always try to choose the highest denomination coin to achieve the desired sum. If it yields infeasible solution, then choose the next highest. Follow similar steps
- Among all possible choices at a given node, it will select only one option and then explore from the new node in a similar manner
- $P=\{10,8,7,4,2,1\}$, $S=15$: greedy method will produce $\{10,4,1\}$ as a solution
- $P=\{16,8,4,2,1\}$, $S=15$: greedy method will produce $\{8,4,2,1\}$ as a solution which is optimal
- $P=\{100,50,20,10,5,2,1\}$, $S=63$: greedy method will produce $\{50,10,2,1\}$ as an optimal solution



Summary

- Try to develop initial recursive definition for the problem at hand
- Analyze the recursion
 - Balance the split (Divide and Conquer)
 - Identical subproblems (Dynamic programming / Memoization)
 - Choice for the subproblems (Greedy)
 - Traversal of the recursion allows pruning or pre-emption based on solutions (Branch-and-Bound)
- Analysis of complexity — derive from recurrence relation
- Data structures — to store / retrieve different information

Thank you!